

Zur Begründung des Zweiflüssigkeitenmodells für Helium II aus der mikroskopischen Theorie

Von WOLFGANG WELLER

Institut für Theoretische Physik der Karl-Marx-Universität Leipzig
(Z. Naturforsch. 19 a, 410—420 [1964]; eingegangen am 28. Oktober 1963)

Es wird ein wechselwirkendes BOSE-System unter der Annahme betrachtet, daß Kondensation im Sinne von PENROSE und ONSAGER vorliegt. Für dieses System werden die Grundgleichungen des Zweiflüssigkeitenmodells aus der mikroskopischen Theorie abgeleitet und die Dichten der normalen und der superfluiden Komponente durch die mikroskopischen Größen ausgedrückt. Es ergibt sich ein für das Zweiflüssigkeitenmodell notwendiges Kriterium für das Anregungsspektrum, das dem LANDAUSchen Superfluiditätskriterium entspricht. Mit Hilfe des abgeleiteten Kriteriums läßt sich zeigen, daß die normale Komponente am absoluten Nullpunkt der Temperatur verschwindet. Den Betrachtungen wird die vollständige Gleichungskette für die thermodynamischen GREENSchen Funktionen zugrunde gelegt, so daß außer der Annahme der Kondensation keine weiteren einschränkenden Annahmen über Dichte und Wechselwirkungspotential notwendig sind. Die Theorie sollte deshalb für reales He II zutreffend sein.

1. Einleitung

Flüssiges He⁴ tritt in den beiden Phasen He I und He II auf. He II zeigt außergewöhnliche physikalische Eigenschaften, insbesondere die Erscheinung der Superfluidität. Zur phänomenologischen Beschreibung dieser physikalischen Eigenschaften von He II wurde von TISZA¹ und LANDAU² das Zweiflüssigkeitenmodell entwickelt. Das Modell betrachtet He II als Mischung zweier unabhängiger Komponenten, einer normalen Flüssigkeit und einer superfluiden Flüssigkeit. Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist nur die superfluide Komponente vorhanden, am λ -Punkt nur die normale Komponente. Im Sinne des Zweiflüssigkeitenmodells gilt für die Massendichte ϱ des He II

$$\varrho = \varrho_n + \varrho_s, \quad (1.1)$$

wobei ϱ_n und ϱ_s die Massendichten der normalen und der superfluiden Komponente sind. Die beiden Komponenten bewegen sich unabhängig und reibungslos gegeneinander, für die Impulsdichte gilt

$$\mathbf{G} = \varrho_n \mathbf{v}_n + \varrho_s \mathbf{v}_s. \quad (1.2)$$

Dabei sind \mathbf{v}_n und \mathbf{v}_s die Geschwindigkeiten der normalen und der superfluiden Komponente.

Die Beziehungen des Zweiflüssigkeitenmodells wurden zuerst von LANDAU^{2,3} aus der Statistik für

bewegte Elementaranregungen abgeleitet. FEYNMAN⁴ vertiefte diese Betrachtungen, indem er das Verhalten der von ihm konstruierten Elementaranregungen in einer bewegten Flüssigkeit untersuchte. Die angeregten Zustände des He II werden dabei aus Elementaranregungen (Phononen und Rotonen) gebildet, die sich (zumindest für Temperaturen, die nicht zu nahe am λ -Punkt sind) wie ein ideales BOSE-Gas verhalten. LONDON⁵ führte die Annahme ein, daß beim He II für die wechselwirkenden He⁴-Atome eine Kondensation vorliegt, die der bekannten BOSE-EINSTEIN-Kondensation des idealen BOSE-Gases entspricht. Ein Einteilchenzustand ist dabei mit einer dem Volumen proportionalen Zahl von Teilchen besetzt und bildet das Kondensat. Diese Annahme wurde von PENROSE und ONSAGER⁶ weiter ausgebaut und begründet. Es erscheint plausibel, die Bewegung des Kondensats mit der Bewegung der superfluiden Komponente gleichzusetzen⁷. Es ist aber nicht möglich, das Kondensat einfach mit der superfluiden Komponente zu identifizieren. Bei $T = 0$ wird die gesamte Flüssigkeit durch die superfluide Komponente dargestellt. Der Kondensatzzustand ist aber beim flüssigen Helium im Gegensatz zum verdünnten oder idealen BOSE-System auch schon für $T = 0$ stark entleert; eine Abschätzung von PENROSE und ONSAGER⁶ ergibt eine Besetzung des Kondensatzzustandes von etwa 8%.

¹ L. TISZA, Phys. Rev. **72**, 838 [1947].

² L. D. LANDAU, J. Phys., USSR **5**, 71 [1941].

³ L. D. LANDAU u. E. M. LIFSHITZ, Statistical Physics, Pergamon Press, London 1958.

⁴ R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **94**, 262 [1954].

⁵ F. LONDON, Phys. Rev. **54**, 947 [1938]; Superfluids, Vol. 2, J. Wiley, New York 1954.

⁶ O. PENROSE u. L. ONSAGER, Phys. Rev. **104**, 576 [1956].

⁷ Vgl. z. B. O. PENROSE, Nuovo Cim., Suppl. **9**, 256 [1958].



Es ist natürlich von Interesse, das Zweiflüssigkeitenmodell aus einer mikroskopischen Theorie zu erklären und dabei die Beziehungen zwischen Kondensat und superfluiden Komponente herzustellen. Für das verdünnte Bose-System mit Pseudopotential wurde das Zweiflüssigkeitenmodell von LEE und YANG⁸ begründet. Für dieses System sind die Verhältnisse einfacher, da wegen der vernachlässigbaren Ausleerung des Kondensatzustandes die superfluide Komponente und das Kondensat zusammenfallen. In letzter Zeit haben sich auch MARTIN und Mitarbeiter⁹ mit dem Zweiflüssigkeitenmodell befaßt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein System wechselwirkender He⁴-Atome mit bewegtem Kondensat behandelt.

Es werden die Beziehungen (1.1) und (1.2) des Zweiflüssigkeitenmodells abgeleitet, und die darin vorkommenden phänomenologischen Größen werden mit den Größen der mikroskopischen Theorie in Verbindung gebracht (Abschnitt 6). Weiterhin wird ein Kriterium für das Anregungsspektrum abgeleitet, das dem LANDAUSchen Superfluiditätskriterium entspricht (Abschnitt 7). Im Abschnitt 8 wird mit Hilfe dieses Kriteriums gezeigt, daß die normale Komponente am absoluten Nullpunkt der Temperatur verschwindet. Die He⁴-Atome werden als spinlose BOSE-Teilchen behandelt, die durch ein Potential $V(r)$ miteinander in Wechselwirkung stehen. Das System wird mit thermodynamischen GREENSchen Funktionen beschrieben. Dabei wird die vollständige Gleichungskette für die GREENSchen Funktionen benutzt, und die Rechnungen beziehen sich auf das reale Wechselwirkungspotential und die reale Dichte der He⁴-Atome.

Die Theorie wird unter der Annahme entwickelt, daß BOSE-EINSTEIN-Kondensation im Sinne von PENROSE und ONSAGER⁶ vorliegt. Für die Einteilchenkorrelationsfunktion $\langle \Psi(\mathbf{r} t) \Psi^+(\mathbf{r}' t) \rangle$ gilt dann^{6, 10, 11}

$$\langle \Psi(\mathbf{r} t) \Psi^+(\mathbf{r}' t) \rangle - \langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle \langle \Psi^+(\mathbf{r}' t) \rangle \rightarrow 0 \quad \text{für } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

$\Psi(\mathbf{r} t)$ ist das quantisierte Feld der spinlosen BOSE-Teilchen; die Klammern $\langle \dots \rangle$ bedeuten Mittelung über die große kanonische Gesamtheit (s. u.).

⁸ T. D. LEE u. C. N. YANG, Phys. Rev. **113**, 1406 [1959].

⁹ Vgl. den Bericht über noch unveröffentlichte Arbeiten von P. C. MARTIN, J. Math. Phys. **4**, 208 [1963].

¹⁰ N. N. BOGOLJUBOV, Physica, Suppl. **26**, 1 [1960]; Phys. Abhandl. SU **6**, 1, 118, 229 [1962].

$\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle$ ist die Wellenfunktion des Kondensatzustandes. Wir nehmen also an, daß das Wechselwirkungspotential beim He⁴ so beschaffen ist, daß im betrachteten Temperaturintervall ($T = 0$ bis $T = T_c$) die Beziehung (1.3) mit von Null verschiedenen Quasimittelwerten $\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle$ gilt. Diese Annahme ist natürlich im Prinzip mit Hilfe der Bewegungsgleichungen prüfbar. Die Kondensation ist notwendig für das Zweiflüssigkeitenmodell, weil sie zwei unabhängige Bewegungen im System ermöglicht (vgl. auch Abschnitt 7). Wir betrachten gleichförmig bewegte Kondensate, die Kondensatwellenfunktionen $\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle$ sind dann ebene Wellen. Das Kondensat wird mit der Methode von BOGOLJUBOV¹⁰ behandelt, die in einer früheren Arbeit¹² (für verdünntes BOSE-System mit δ -förmigem Pseudopotential) auf bewegte Kondensatzustände übertragen wurde.

Die Zustände mit bewegtem Kondensat müssen als metastabile Zustände betrachtet werden, das System befindet sich dabei in einem thermodynamischen Quasigleichgewicht¹³. Bei den thermodynamischen Mittelungen für die GREENSchen Funktionen muß darauf Rücksicht genommen werden; die Mittelungen dürfen nicht über die vollständige große kanonische Gesamtheit erfolgen.

2. Der Hamilton-Operator

Das unendlich ausgedehnte System der wechselwirkenden He⁴-Atome, die als spinlose BOSE-Teilchen behandelt werden, wird durch den HAMILTON-Operator

$$H = H_0 + H_{WW} + H_v \quad (2.1)$$

mit

$$H_0 = \int \Psi^+(\mathbf{r} t) \, h(\mathbf{r}) \, \Psi(\mathbf{r} t) \, d^3 \mathbf{r},$$

$$h(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu + i \hbar^2 \frac{u}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

$$H_{WW} = \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \, \Psi^+(\mathbf{r}_1 t) \, \Psi^+(\mathbf{r}_2 t) \cdot \Psi(\mathbf{r}_2 t) \, \Psi(\mathbf{r}_1 t) \, d^3 \mathbf{r}_1 \, d^3 \mathbf{r}_2$$

beschrieben. m ist die Masse eines He⁴-Atoms, $V(r)$ das Wechselwirkungspotential zwischen den Atomen.

$$\Psi(\mathbf{r} t) = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) \exp\{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} \quad (2.2)$$

¹¹ C. N. YANG, Rev. Mod. Phys. **34**, 694 [1962].

¹² W. WELLER, Z. Naturforsch. **18a**, 79 [1963].

¹³ Vgl. die Diskussion von LEE u. YANG⁸.

ist das quantisierte Feld der Bose-Teilchen mit den Vertauschungsrelationen für gleiche Zeiten

$$[\Psi(\mathbf{r}_1 t), \Psi^+(\mathbf{r}_2 t)] = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (2.3)$$

$$[\Psi(\mathbf{r}_1 t), \Psi(\mathbf{r}_2 t)] = 0.$$

Ω ist das Normierungsvolumen; die Klammer $[A, B]$ bezeichnet den Kommutator.

Der Operator H_0 enthält zwei Zusatzterme. Der erste ist der in der großen kanonischen Gesamtheit übliche Term mit dem chemischen Potential μ . Der zweite Zusatzterm $-\hbar(\mathbf{u}/m)\mathbf{P}$ ist notwendig, da wir im Sinne des Zweiflüssigkeitenmodells bewegte Systeme behandeln, bei denen sich die normale und die superfluide Komponente bewegen. (\mathbf{P} ist der Operator des Gesamtimpulses, $\hbar \mathbf{u}/m$ ist ein LAGRANGESCHER Multiplikator.) Dieser Zusatzterm erlaubt, über eine Gesamtheit von Systemen mit beliebigem Gesamtimpuls zu mitteln, und den Erwartungswert des Gesamtimpulses durch den Multiplikator vorzuschreiben.

Der dritte Zusatzterm H_r hebt die beim kondensierten BOSE-System vorliegende Entartung der statistischen Gleichgewichtszustände bzw. Quasigleichgewichtszustände (bei bewegtem Kondensat) auf¹⁰. Er ermöglicht damit gleichzeitig die Einführung von Quasimittelwerten¹⁰. Wir betrachten ein gleichförmig bewegtes Kondensat, setzen also die Kondensatwellenfunktion in der folgenden Form an:

$$\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle = \sqrt{\varrho_0} \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\}, \text{ wo } \varrho_0 = N_0/\Omega. \quad (2.4)$$

$\hbar \mathbf{k}_0$ ist der Impuls pro Kondensatteilchen; N_0 ist die Zahl der Teilchen im Kondensat und ϱ_0 die Teilchendichte der Kondensatteilchen. Der Ausdruck $\langle A \rangle$ bedeutet Mittelung eines Operators A über die große kanonische Gesamtheit.

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_i (c_i | A e^{-\beta H} | c_i)}{\sum_i (c_i | e^{-\beta H} | c_i)}. \quad (2.5)$$

$\beta = 1/\varkappa T$, \varkappa ist die BOLTZMANN-Konstante. $|c_i\rangle$ sind die Vierteilchenwellenfunktionen des BOSE-Systems.

Damit der Quasimittelwert (2.4) in der aufgeschriebenen Form verschieden von Null ist, muß die Entartung [bezüglich einer willkürlichen Phase in (2.4)] durch den Zusatzterm

$$H_r = -\nu \int \exp\{-i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} \Psi(\mathbf{r} t) d^3 r + \text{herm. konj.} \quad (2.6)$$

aufgehoben werden. Nach der Mittelung (2.5) und dem Grenzübergang $\Omega \rightarrow \infty$ ist der Grenzübergang $\nu \rightarrow +0$ auszuführen.

Wie schon oben erwähnt, befindet sich ein System mit bewegtem Kondensat in einem thermodynamischen Quasigleichgewicht¹³. Das wirkliche thermodynamische Gleichgewicht liegt bei ruhendem Kondensat vor. Der Übergang von einem Bewegungszustand des Kondensats zu einem anderen erfordert in den Wellenfunktionen den Umbau einer makroskopischen Zahl von Teilchen wegen der makroskopischen Besetzung des Kondensatzustandes. Wir nehmen an, daß solche Übergänge dem betrachteten System nicht zugänglich sind, und betrachten deshalb einen Zustand mit bestimmter Bewegung des Kondensats als metastabiles Quasigleichgewicht.

Auf Grund dieser Überlegungen muß die thermodynamische Mittelung in (2.5) eingeschränkt werden. Es darf nur über Vierteilchenwellenfunktionen $|c_i\rangle$ gemittelt werden, die zu einem bestimmten Bewegungszustand des Kondensats gehören. Diese Einschränkung der Mittelung wird automatisch durch den Zusatzterm (2.6) und die Methode zur Abtrennung des Kondensats (s. u.) vorgenommen.

3. Die Abhängigkeit der Mittelwerte von den Raum- und Zeitkoordinaten

Wir haben für die räumliche Verschiebung der Feldoperatoren die Beziehung

$$\Psi(\mathbf{r} t) = \exp\{-i \mathbf{P} \mathbf{r}/\hbar\} \Psi(0 t) \exp\{i \mathbf{P} \mathbf{r}/\hbar\}. \quad (3.1)$$

Die Feldoperatoren in \mathbf{P} sind dabei auch zur Zeit t zu nehmen.

Da wir im folgenden Zustände mit bewegtem Kondensat mit Zuständen mit ruhendem Kondensat vergleichen wollen, spalten wir die Kondensatbewegung von den Feldoperatoren ab.

$$\Psi(\mathbf{r} t) = \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} \hat{\Psi}(\mathbf{r} t), \quad (3.2)$$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r} t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \exp\{i \mathbf{k} \mathbf{r}\}.$$

Der Vergleich mit (2.2) ergibt natürlich $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_0}(t)$. Die Transformation (3.1) geht für den neuen Feldoperator $\hat{\Psi}$ über in

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r} t) = \exp\{-i \hat{\mathbf{P}} \mathbf{r}/\hbar\} \hat{\Psi}(0 t) \exp\{i \hat{\mathbf{P}} \mathbf{r}/\hbar\}, \quad (3.3)$$

wobei $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \hbar \mathbf{k}_0 N$.

Der Operator $\hat{\mathbf{P}}$ gibt die Differenz zum Impuls für den Fall, daß sich alle Teilchen gleichförmig mit dem Kondensat mitbewegen. $\hat{\mathbf{P}}$ ist mit dem HAMILTON-Operator H vertauschbar, \mathbf{P} dagegen ist wegen H_r ,

nicht mit H vertauschbar; N ist der Teilchenzahloperator.

Für die Zeitabhängigkeit der Feldoperatoren haben wir

$$\Psi(\mathbf{r} t) = e^{i H t / \hbar} \Psi(\mathbf{r} 0) e^{-i H t / \hbar}. \quad (3.4)$$

Da die thermodynamische Mittelung (2.5) auch mit dem HAMILTON-Operator H durchgeführt wird, ergibt sich sofort, daß Mittelwerte von Produkten der Feldoperatoren $\hat{\Psi}$ und $\hat{\Psi}^+$ nur von den Differenzen der Raum- und Zeitkoordinaten abhängen. So ist z. B.

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r} t) \rangle = \text{const},$$

$$\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1 t_1) \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_2 t_2) \rangle = f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2), \quad (3.5)$$

usw.

4. Die Wellengleichung für das Kondensat

Nach den Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes muß der Mittelwert $\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle$ zeitunabhängig sein. Diese Bedingung bedeutet physikalisch, daß die Zahl der Teilchen im Kondensat zeitlich konstant ist. Sie liefert die Wellengleichung für das Kondensat.

$$0 = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle$$

$$= \langle [\Psi(\mathbf{r} t), H] \rangle. \quad (4.1)$$

Die Berechnung des Kommutators ergibt, wenn wir gleich noch den Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ ausführen,

$$0 = \hbar(\mathbf{r}) \langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle \quad (4.2)$$

$$+ \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \Psi^+(\mathbf{r}_1 t) \Psi(\mathbf{r}_1 t) \Psi(\mathbf{r} t) \rangle d^3 \mathbf{r}_1.$$

Gl. (4.2) spielt die Rolle einer verallgemeinerten SCHRÖDINGER-Gleichung¹⁴ für die Kondensatwellenfunktion. Wir haben nach (2.4) im Einklang mit (3.5)

$$\langle \Psi(\mathbf{r} t) \rangle = \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r} t) \rangle = \sqrt{\varrho_0} \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} \quad (4.3)$$

(s. Anm.¹⁵). Einsetzen in die SCHRÖDINGER-Gl. (4.2) liefert

$$0 = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}_0^2 - 2 \mathbf{u} \mathbf{k}_0) - \mu \right\} \sqrt{\varrho_0} \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\}$$

$$+ \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_1 t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1 t) \hat{\Psi}(\mathbf{r} t) \rangle d^3 \mathbf{r}_1 \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\}. \quad (4.4)$$

¹⁴ Eine solche SCHRÖDINGER-Gleichung wurde schon von E. P. GROSS, Nuovo Cim. **20**, 454 [1961] und L. P. PITAEVSKIJ, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **40**, 646 [1961] benutzt.

Die Theorie enthält vier Parameter, und zwar das chemische Potential μ , die Teilchendichte der Kondensatteilchen ϱ_0 , den Impuls der Kondensatteilchen $\hbar \mathbf{k}_0$ und den Multiplikator \mathbf{u} . Die Kondensatbewegung \mathbf{k}_0 wird vorgegeben. Die Vorgabe des Erwartungswertes des Gesamtimpulses legt \mathbf{u} fest und umgekehrt. Für ϱ_0 und μ stehen Gl. (4.4) und die Vorgabe der Gesamtteilchenzahl zur Verfügung. Wir berechnen μ aus (4.4).

$$\tilde{\mu} \equiv \mu - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}_0^2 - 2 \mathbf{u} \mathbf{k}_0)$$

$$= \varrho_0^{-1/2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}_1 t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1 t) \hat{\Psi}(\mathbf{r} t) \rangle d^3 \mathbf{r}_1$$

$$\equiv U, \quad (4.5)$$

wobei U unabhängig von \mathbf{r} und t und reell ist¹⁵.

5. Bewegungsgleichungen für die Greenschen Funktionen

Wir betrachten jetzt die außerhalb des Kondensats befindlichen Teilchen. Von dem Feldoperator Ψ spalten wir den Kondensatanteil ab und behandeln ihn wegen der makroskopischen Besetzung des Kondensats im folgenden als c -Zahl¹⁶.

$$\Psi(\mathbf{r} t) = \frac{a_{\mathbf{k}_0}}{\sqrt{\Omega}} \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} + \psi(\mathbf{r} t) \quad (5.1)$$

$$= \sqrt{\varrho_0} \exp\{i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}\} + \psi(\mathbf{r} t),$$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r} t) = \sqrt{\varrho_0} + \hat{\psi}(\mathbf{r} t). \quad (5.2)$$

Die neuen Feldoperatoren ψ bzw. $\hat{\psi}$ enthalten nicht die FOURIER-Komponente mit $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ bzw. $\mathbf{k} = 0$. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[\psi(\mathbf{r}_1 t), \psi^+(\mathbf{r}_2 t)]$$

$$= \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{1}{\Omega} \exp\{i \mathbf{k}_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}, \quad (5.3 \text{ a})$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}_1 t), \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2 t)] = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{1}{\Omega} \equiv \hat{\delta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (5.3 \text{ b})$$

Die außerhalb des Kondensats befindlichen Teilchen behandeln wir mit Hilfe retardierter und avancierter thermodynamischer GREENScher Funktionen, die in

¹⁵ Der HAMILTON-Operator (2.1) enthält in Impulsdarstellung nur reelle Koeffizienten. Daraus folgt, daß der Mittelwert eines beliebigen Produktes aus Operatoren $a_{\mathbf{k}}$ und $a_{\mathbf{k}}^*$ (zu gleichen Zeiten genommen) reell ist. Mit (3.5) ergibt sich dann die Realität von $\langle \hat{\Psi} \rangle$ und U [s. Gl. (4.5)].

folgender Weise (für Bose-Statistik) definiert sind¹⁶:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{r,a}(t, t') &\equiv \langle \langle A(t); B(t') \rangle \rangle \\ &= \left. -i \Theta(t - t') \right\} \langle [A(t), B(t')] \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

A und B sind Produkte aus den Feldoperatoren, $\Theta(t)$ ist die Sprungfunktion. Im Anhang wird gezeigt, daß für die GREENSchen Funktionen auch bei der hier verwendeten eingeschränkten thermodynamischen Mittelung die übliche Spektraldarstellung gilt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \langle A(t); B(t') \rangle \rangle \\ = \pm i \hbar \delta(t - t') \langle \langle A(t); B(t^\mp) \rangle \rangle \quad (5.5) \\ + \langle \langle [A(t), H]; B(t') \rangle \rangle \end{aligned}$$

mit $t^\mp = t \mp 0$. Die oberen Vorzeichen sind bei retardierten, die unteren bei avancierten GREENSchen Funktionen zu nehmen.

Durch die Bewegungsgleichung (5.5) werden die GREENSchen Funktionen miteinander verkoppelt, so daß zur Bestimmung einer GREENSchen Funktion eine ganze Kette von Gleichungen notwendig ist. Wir betrachten eine solche vollständige Kette und untersuchen, in welcher Weise die Parameter \mathbf{u} und \mathbf{k}_0 eingehen.

Wir gehen aus von der Funktion $\langle \langle \psi(\mathbf{r}_1 t); \psi^*(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle$. Zu dem letzten Term von (5.5) ist zu bemerken, daß H Kondensatanteile enthält, die als c -Zahlen abgespalten werden. Die Ausgangsfunktion wird dadurch mit Funktionen verkoppelt, die vier, drei und zwei Feldoperatoren enthalten. Darunter sind auch anomale Funktionen (Quasimittelwerte), bei denen die Zahl der Erzeugungsoperatoren nicht gleich der Zahl der Vernichtungsoperatoren ist, z. B. die Funktion $\langle \langle \psi^*(\mathbf{r}_1 t); \psi^*(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle$. Für jede der so entstehenden Funktionen muß wieder die Bewegungsgleichung (5.5) betrachtet werden, usw.

Um diese Kette von Bewegungsgleichungen zu diskutieren, führen wir einige Bezeichnungen ein. Wir schreiben allgemein für ein Produkt von s Feldoperatoren

$$A_s(t) = \prod_{j=1}^s \varphi_j(\mathbf{r}_j t), \quad (5.6)$$

wobei

$$\varphi_j(\mathbf{r}_j t) = \psi(\mathbf{r}_j t) \quad \text{oder} \quad \psi^*(\mathbf{r}_j t).$$

¹⁶ Vgl. z. B. D. N. ZUBAREV, Usp. Fiz. Nauk **71**, 71 [1960]; deutsche Übersetzung in Fortschr. Phys. **9**, 275 [1961]; V. L. BONCH-BRUEVICH u. S. V. TYABLIKOV, The GREEN Function Method in Statistical Mechanics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1962.

Die Reihenfolge der Operatoren in (5.6) sei so festgelegt, daß die Operatoren von links nach rechts nach wachsendem j geordnet seien. Zu jedem s gibt es mehrere solche Produkte, die sich durch die Anordnung und durch verschiedenes Auftreten von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren unterscheiden. Es ist aber für die folgenden Betrachtungen nicht notwendig, diese verschiedenen Produkte durch verschiedene Symbole zu bezeichnen.

Für die Bewegungsgleichung ist der Kommutator mit H zu berechnen.

$$[A_s(t), H] = \sum_{l=1}^s \varphi_1 \dots \varphi_{l-1} [\varphi_l(\mathbf{r}_l t), H] \varphi_{l+1} \dots \varphi_s. \quad (5.7)$$

Die Operatoren ψ und ψ^* kommutieren mit H_r , so daß H_r aus den Gleichungen für die GREENSchen Funktionen herausfällt. Für die Kommutatoren mit H_0 ergibt sich.

$$[\varphi_l(\mathbf{r}_l t), H_0] = h_l \varphi_l(\mathbf{r}_l t) \quad (5.8)$$

mit

$$\begin{aligned} h_l &= \varepsilon_l \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_l - \mu \right) + i \hbar^2 \frac{\mathbf{u}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_l}, \\ \varepsilon_l &= \begin{cases} +1 & \text{für} \quad \varphi_l = \psi, \\ -1 & \text{für} \quad \varphi_l = \psi^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit können wir die allgemeine Bewegungsgleichung für die GREENSchen Funktionen schreiben

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \langle A_s(t); \psi^*(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle \\ = \pm i \hbar \delta(t - t') \langle \langle A_s(t); \psi^*(\mathbf{r}' t^\mp) \rangle \rangle \\ + \langle \langle \sum_l \varphi_1 \dots \varphi_{l-1} (h_l \varphi_l) \varphi_{l+1} \dots \varphi_s; \psi^*(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle \\ + \langle \langle [A_s(t), H_{WW}(t)]; \psi^*(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wir spalten nun die Kondensatbewegung entsprechend Gl. (3.2) ab. Der HAMILTON-Operator der Wechselwirkung H_{WW} ändert seine formale Gestalt bei der Umrechnung von Ψ auf $\hat{\Psi}$ nicht.

$$H_{WW} = \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}^*(\mathbf{r}_1 t) \hat{\Psi}^*(\mathbf{r}_2 t) \cdot \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2 t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1 t) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \quad (5.10)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \hat{A}_s(t) &= \prod_{j=1}^s \hat{\varphi}_j(\mathbf{r}_j t), \\ \hat{\varphi}_j(\mathbf{r}_j t) &= \hat{\psi}(\mathbf{r}_j t) \quad \text{oder} \quad \hat{\psi}^*(\mathbf{r}_j t), \\ \varepsilon_l &= \begin{cases} +1 & \text{für} \quad \hat{\varphi}_l = \hat{\psi}, \\ -1 & \text{für} \quad \hat{\varphi}_l = \hat{\psi}^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

lautet dann die allgemeine Bewegungsgleichung für die GREENSchen Funktionen

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \langle \hat{A}_s(t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \pm i\hbar \delta(t-t') \langle \langle \hat{A}_s(t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t^\mp) \rangle \rangle \\ &+ \langle \langle \sum_l \hat{\phi}_1 \dots \hat{\phi}_{l-1} (\hat{h}_l \hat{\phi}_l) \hat{\phi}_{l+1} \dots \hat{\phi}_s ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle \\ &+ \langle \langle [\hat{A}_s(t), H_{WW}(t)] ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle, \quad (5.12) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{h}_l &= \varepsilon_l \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_l - \tilde{\mu} \right) + \frac{i\hbar^2}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_l} \\ &= \varepsilon_l \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_l - U \right) + \frac{i\hbar^2}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_l}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{A}_s(t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\Omega})^{s+1}} \sum_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathfrak{G}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \mathbf{k}, \omega) \\ &\cdot \exp\{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{k}_s \mathbf{r}_s) - i\mathbf{k} \mathbf{r} - i\omega(t-t')\}. \quad (5.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \langle [\hat{A}_s(t), H_{WW}(t)] ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\Omega})^{s+1}} \sum_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathfrak{W}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \mathbf{k}, \omega) \\ &\cdot \exp\{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{k}_s \mathbf{r}_s) - i\mathbf{k} \mathbf{r} - i\omega(t-t')\}. \quad (5.14) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun analog wie im Abschnitt 3 die Ortsabhängigkeit der Funktionen (5.13) und (5.14). Die räumliche Verschiebung der Operatoren $\hat{\psi}$ und $\hat{\psi}^+$ wird mit dem reduzierten Impulsoperator $\hat{\mathbf{P}}$ vorgenommen [vgl. (3.3)]. Der Operator $\hat{\mathbf{P}}$ ist mit H und auch mit H_{WW} vertauschbar. Daraus kann man sofort schließen, daß die obigen Funktionen nur von den Koordinatendifferenzen $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_{s-1} - \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s - \mathbf{r}$ abhängen. Folglich kommen bei den obigen FOURIER-Entwicklungen nur Anteile vor, für die

$$\sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j = \mathbf{k}. \quad (5.15)$$

In der Impulsdarstellung zerfallen die GREENSchen Funktionen also in Klassen nach dem zu $\hat{\psi}^+(\mathbf{r} t')$ gehörenden Impuls $\hbar \mathbf{k}$. Nur GREENSche Funktionen einer Klasse werden durch die allgemeine Bewegungsgleichung miteinander verkoppelt.

Die FOURIER-Transformierte der Bewegungsgleichung (5.12) lautet nun

$$\begin{aligned} \{\hbar \omega - h(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s)\} \mathfrak{G}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega) &= \pm \frac{i\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathfrak{G}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega') e^{-i\omega'(t-t')} \Big|_{t-t' \rightarrow \pm 0} + \mathfrak{W}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega), \quad (5.16) \end{aligned}$$

wobei

$$h(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s) = \sum_{l=1}^s \varepsilon_l \left(\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}_l^2 - \tilde{\mu} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \sum_l \mathbf{k}_l \quad (5.17 \text{ a})$$

$$= \sum \varepsilon_l \left(\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}_l^2 - U \right) - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \mathbf{k}. \quad (5.17 \text{ b})$$

6. Das Zweiflüssigkeitenmodell

Wir betrachten noch einmal im Zusammenhang die Gleichungen für unser Problem. Die GREENSchen Funktionen werden aus den Bewegungsgleichungen

Dabei wurde in der letzten Gleichung $\tilde{\mu}$ nach (4.5) durch U ersetzt.

Durch die Gln. (5.12) wird bereits die Frage beantwortet, in welcher Weise die Parameter \mathbf{u} und \mathbf{k}_0 in die Bewegungsgleichungen für die GREENSchen Funktion eingehen. Die Grundgleichungen des Zweiflüssigkeitenmodells folgen direkt aus der Tatsache, daß in (5.12) nur die Differenz $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$ auftritt (vgl. Abschnitt 6).

Für weitere Diskussionen (vgl. Abschnitt 7) ist es aber noch nützlich zu untersuchen, in welcher Weise die Differenz $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$ mit den Frequenzen zusammenhängt. Dazu werden wir zur räumlichen und zeitlichen FOURIER-Transformierten von (5.12) übergehen.

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{A}_s(t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\Omega})^{s+1}} \sum_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathfrak{G}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \mathbf{k}, \omega) \\ &\cdot \exp\{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{k}_s \mathbf{r}_s) - i\mathbf{k} \mathbf{r} - i\omega(t-t')\}. \quad (5.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \langle [\hat{A}_s(t), H_{WW}(t)] ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\Omega})^{s+1}} \sum_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathfrak{W}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \mathbf{k}, \omega) \\ &\cdot \exp\{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{k}_s \mathbf{r}_s) - i\mathbf{k} \mathbf{r} - i\omega(t-t')\}. \quad (5.14) \end{aligned}$$

(5.12) berechnet. Die richtigen Lösungen der Bewegungsgleichungen (zum vorgeschriebenen β) lassen sich durch die Spektraldarstellung (A.6) bestimmen. Die in (5.12) auftretenden Kommutatoren mit H_{WW} ergeben sich mit Hilfe der Vertauschungs-

relation (5.3 b) und der Beziehung (5.2). U ist in Gl. (4.5) definiert, der darin enthaltene Mittelwert ergibt sich nach (A.5) aus der entsprechenden GREENSchen Funktion. Die Parameter \mathbf{u} und \mathbf{k}_0 betrachten wir als vorgegeben, damit ist dann der Erwartungswert des Gesamtimpulses bestimmt. Die Dichte der Kondensatteilchen folgt aus

$$\varrho_0 + \langle \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t) \psi(\mathbf{r} t) \rangle = n, \quad (6.1)$$

wo n die Gesamtzahl der Teilchen pro Volumen ist.

Die Parameter \mathbf{u} und \mathbf{k}_0 enthält von allen den angeführten Gleichungen nur die Bewegungsgleichung (5.12) in Form der Differenz $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$. Daraus ergeben sich nun sofort die Beziehungen des Zweiflüssigkeitenmodells.

Wir gehen aus von der Korrelationsfunktion

$$\langle \hat{\psi}^+(\mathbf{r}' t) \hat{\psi}(\mathbf{r} t) \rangle = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \exp\{i \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} n(\mathbf{k}). \quad (6.2)$$

Die Verteilungsfunktion $n(\mathbf{k})$ hat die physikalische Bedeutung der Zahl der Teilchen pro Volumen mit Impuls $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)$. Diese Größe kann nur von der Differenz $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$ abhängen. Wir betrachten $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$ als klein und entwickeln bis zur ersten Ordnung

$$n(\mathbf{k}) = n^0(\mathbf{k}) + \mathbf{n}^1(\mathbf{k}) (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) + \dots \quad (6.3)$$

$n_0(\mathbf{k})$ ergibt sich aus den Lösungen der oben zusammengestellten Gleichungen für $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0 = 0$ und muß folglich beim Übergang $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ symmetrisch sein, da dann keine Richtungen mehr ausgezeichnet sind.

Für die Impulsdichte bekommen wir

$$\mathbf{G} = \hbar \mathbf{k}_0 \varrho_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) n(\mathbf{k}). \quad (6.4)$$

Der erste Term stellt die Impulsdichte der Kondensatteilchen dar.

$$\mathbf{G} = \hbar \mathbf{k}_0 n + \sum \hbar \mathbf{k}(\mathbf{n}^1(\mathbf{k}) (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0)). \quad (6.5)$$

Wir schreiben diese Beziehung in der Form

$$\mathbf{G} = \varrho_s \mathbf{v}_s + \varrho_n \mathbf{v}_n. \quad (6.6)$$

Dabei bedeuten $\hbar \mathbf{k}_0/m = \mathbf{v}_s$ und $\hbar \mathbf{u}/m = \mathbf{v}_n$ die Geschwindigkeiten der superfluiden und der normalen Komponente. Für die Massendichten ϱ_s und

ϱ_n der superfluiden und der normalen Komponente ergibt sich

$$\varrho_s \mathbf{v} = m n \mathbf{v} - m \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(\mathbf{n}^1(\mathbf{k}) \mathbf{v}), \quad (6.7)$$

$$\varrho_n \mathbf{v} = m \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(\mathbf{n}^1(\mathbf{k}) \mathbf{v}). \quad (6.8)$$

ϱ_s und ϱ_n sind natürlich unabhängig von dem willkürlichen Vektor \mathbf{v} . Aus den Gln. (6.7) und (6.8) folgt auch die andere Grundgleichung des Zweiflüssigkeitenmodells

$$\varrho_s + \varrho_n = \varrho, \quad (6.9)$$

wobei $\varrho = m n$ die Massendichte der Teilchen ist.

Die Formeln vereinfachen sich etwas, wenn man auf eine der beiden Bewegungen verzichtet. Für die Lösung mit $\mathbf{u} = 0$ läßt sich z. B. die Massendichte der normalen Komponente mit Hilfe von Gl. (6.3) schreiben

$$\varrho_n \mathbf{v}_s = - \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} n(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{u}=0}. \quad (6.10)$$

Die obigen Beziehungen zeigen die Identität der Bewegung des Kondensats mit der Bewegung der superfluiden Komponente. Im Gegensatz zu ϱ_0 erscheinen ϱ_s und ϱ_n als abgeleitete Größen, die im Rahmen der mikroskopischen Theorie keine unmittelbare Bedeutung haben. Der Zusammenhang zwischen ϱ_0 und ϱ_s ist indirekt.

Die Gleichungen des Zweiflüssigkeitenmodells ergeben sich in linearer Näherung in $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$. In höheren Näherungen ist die einfache und anschauliche Vorstellung des Zweiflüssigkeitenmodells nicht mehr gültig. Wir haben hier den Einfluß von Gefäßwänden nicht berücksichtigt und betrachten ein unendlich ausgedehntes System. Die Berücksichtigung der Gefäßwände würde noch liefern, daß eine ungestörte Bewegung der superfluiden Komponente nur bei kleinem \mathbf{v}_s möglich ist.

Die Massendichten der normalen und der superfluiden Komponente lassen sich natürlich auch direkt durch die GREENSche Funktion für ein Teilchen

$$\mathfrak{G}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle \langle \hat{\psi}(\mathbf{r} t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r}' t') \rangle \rangle \quad (6.11)$$

ausdrücken. Wir betrachten wieder die Lösung für $\mathbf{u} = 0$ und erhalten aus (6.10) mit Hilfe der Gln. (A.5) und (A.7)

$$\varrho_n \mathbf{v}_s = \hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{G}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega + i \varepsilon) - \mathfrak{G}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega - i \varepsilon)}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} e^{-i \omega(t - t')} d\omega, \quad (6.12)$$

wobei am Ende der Berechnung die Grenzübergänge $t - t' \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$ und $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ auszuführen sind.

Wir betrachten als Beispiel ein Bose-System aus „harten Kugeln“ mit δ -förmigem Pseudopotential¹⁷

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V \delta(\mathbf{r}), \\ V &= 8 \pi \alpha \hbar^2/m \end{aligned} \quad (6.13)$$

(α Kugelradius), das in einer früheren Arbeit¹² mit den hier benutzten Methoden behandelt wurde. Bei den Rechnungen wurde angenommen, daß die Zahl der Kondensatteilchen groß gegen die Zahl der Teilchen außerhalb des Kondensats ist. Diese Annahme ist für schwache Wechselwirkung, geringe Dichte und für Temperaturen genügend weit unterhalb des λ -Punktes gültig. Die Rechnungen wurden für den Fall $\mathbf{u} = 0$ durchgeführt. Für die räumliche und zeitliche FOURIER-Transformierte der GREENSchen Einteilchenfunktion ergaben sich in der ω -Ebene die Pole¹²

$$\varepsilon_{1,2} = \hbar \mathbf{k} \mathbf{v}_s \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} V \varrho_0} = a \pm b \quad (6.14)$$

mit $|a| < b$. Das System hat also bei $\mathbf{v}_s = 0$ die Anregungen

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{m} V \varrho_0}. \quad (6.15)$$

Für die Dichte der normalen Komponente ist der in \mathbf{k} antisymmetrische Anteil $n^A(\mathbf{k})$ der Verteilungsfunktion $n(\mathbf{k})$ maßgebend. Für diesen Anteil ergibt sich¹²

$$n^A(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\Omega} \left(\frac{1}{e^{\beta(a+b)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(-a+b)} - 1} \right). \quad (6.16)$$

(6.10) liefert dann für die Dichte der normalen Komponente

$$\varrho_n \mathbf{v}_s = - \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} \frac{1}{\exp\{\beta(\hbar \mathbf{k} \mathbf{v}_s + \varepsilon(\mathbf{k}))\} - 1}. \quad (6.17)$$

Das ist genau LANDAU Resultat³ (mit $\mathbf{v}_n = -\mathbf{v}_s$) für ϱ_n . Es ist nützlich, das Verhältnis der LANDAU-schen Theorie zur mikroskopischen Theorie noch genauer zu diskutieren. Die Anregungen $\varepsilon(\mathbf{k})$ beziehen sich bei LANDAU auf die wirklichen Anregungen eines Systems mit fester Teilchenzahl, für kleine \mathbf{k} z. B. auf Dichteschwankungen. Diese Anregungen werden durch die GREENSche Zweiteilchenfunktion $\langle\langle \sigma(\mathbf{r}t); \sigma(00) \rangle\rangle$ mit $\sigma(\mathbf{r}t) = \Psi^+(\mathbf{r}t) \Psi(\mathbf{r}t)$ geliefert. Die Anregungen, die die GREENSche Einteilchenfunktion liefert, müssen nicht mit den wirklichen Anregungen des Systems übereinstimmen¹⁸.

Für das Bose-System mit geringer Dichte und schwacher Wechselwirkung besteht diese Übereinstimmung allerdings. Die Dichten ϱ_n und ϱ_s werden durch die mikroskopische Theorie mit der GREENSchen Einteilchenfunktion verknüpft. Für He II werden die Verhältnisse deshalb nicht so einfach liegen wie beim obigen Beispiel. Es ist aber zu erwarten, daß die durch (6.8) gelieferte Dichte auch für He II mit der LANDAUSchen übereinstimmt.

7. Bedingungen für das Zweiflüssigkeitenmodell

Die wesentlichste Eigenschaft des Zweiflüssigkeitenmodells ist die Möglichkeit unabhängiger Bewegungen der beiden Komponenten. Die im vorhergehenden Abschnitt für das Zweiflüssigkeitenmodell abgeleiteten Gleichungen (6.6) bis (6.9) garantieren allein noch nicht zwei unabhängige Bewegungen. Es ist im Rahmen dieser Gleichungen auch möglich, daß nur uniforme Bewegungen des ganzen Systems auftreten, wenn nämlich stets $\varrho_s = 0$ oder $\varrho_n = 0$ oder $\mathbf{k}_0 = \mathbf{u}$. Im folgenden sollen zwei Bedingungen abgeleitet werden, die für das Auftreten zweier unabhängiger Bewegungen im Sinne des Zweiflüssigkeitenmodells notwendig sind.

Wir untersuchen zuerst die Frage, ob die Kondensation für das Zweiflüssigkeitenmodell notwendig ist. Auf den ersten Blick steht die Dichte der superfluiden Komponente ϱ_s nicht in Verbindung mit ϱ_0 . Es ist aber zu erwarten, daß die Transformation (3.2) nur dann eine physikalische Bedeutung hat, wenn sich wirklich Kondensatteilchen mit Impuls $\hbar \mathbf{k}_0$ bewegen. Das läßt sich in der Tat leicht aus den Bewegungsgleichungen ableiten.

Wir betrachten die Bewegungsgleichung (5.16) für den Fall $\varrho_0 = 0$, d. h. für ein nicht kondensiertes Bose-System. Dann entfällt Gl. (4.5), und $\hat{\mu}$ darf nicht durch U ersetzt werden. Der Kommutator mit H_{WW} erzeugt keine anomalen Funktionen. Alle mit der Ausgangsfunktion $\langle\langle \hat{\psi}; \hat{\psi}^+ \rangle\rangle$ verknüpften Funktionen enthalten die gleiche Anzahl von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, und es gilt

$$\sum_l \varepsilon_l = 1. \quad (7.1)$$

Wir betrachten nun die Größe (5.17 a)

$$\begin{aligned} h(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s) &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_l \varepsilon_l [\mathbf{k}_l - \varepsilon_l (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0)]^2 \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0)^2 - \tilde{\mu} \end{aligned} \quad (7.2)$$

und führen die Substitution aus

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_l &= \varepsilon_l (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) + \mathbf{g}_l, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{u} - \mathbf{k}_0 + \sum_l \mathbf{g}_l = \mathbf{u} - \mathbf{k}_0 + \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

¹⁷ K. HUANG u. C. N. YANG, Phys. Rev. **105**, 767 [1957].

¹⁸ Vgl. die Diskussion bei P. C. MARTIN⁹.

Daraus ergibt sich, daß $h(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s)$ beim Übergang $\mathbf{g}_l \rightarrow -\mathbf{g}_l$ unverändert bleibt.

Um das Verhalten der \mathfrak{W}_s bei diesem Übergang zu untersuchen, betrachten wir den Kommutator

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}t), H_{WW}] = \int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2 t) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1 t) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \quad (7.4)$$

und gehen zur räumlichen FOURIER-Transformierten über.

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_j}, H_{WW}] = \frac{1}{Q} \sum V_{\mathbf{m}} \hat{a}_{-\mathbf{k}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_3}, \quad (7.5)$$

wobei

$$V_{\mathbf{m}} = \int \exp\{-i \mathbf{m} \mathbf{r}\} V(r) d^3 \mathbf{r}.$$

($V_{\mathbf{m}} = V_{-\mathbf{m}}$). Für die Summe in (7.5) gelten die Einschränkungen

$$\mathbf{m} - \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_3 = 0, \quad \mathbf{m} - \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = 0. \quad (7.6)$$

Analoge Beziehungen ergeben sich auch für den Kommutator eines Erzeugungsooperators $\hat{\psi}^+$ mit H_{WW} . Aus den Gln. (7.2), (7.5) und (7.6) folgt, daß die GREENSchen Funktionen $\mathfrak{G}_s(\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_s)$ und $\mathfrak{G}_s(-\mathbf{g}_1 \dots -\mathbf{g}_s)$ identische Bewegungsgleichungen erfüllen. $\mathfrak{G}_s(\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_s)$ ist daher bei dem Übergang $\mathbf{g}_l \rightarrow -\mathbf{g}_l$ invariant¹⁹.

Für die Impulsdichte können wir nach Gl. (6.4) schreiben ($\varrho_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) n(\mathbf{k}) \\ &= \hbar \mathbf{u} n + \sum_{\mathbf{g}} \hbar \mathbf{g} n(\mathbf{g}) = \hbar \mathbf{u} n. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wir benutzen nun für die GREENSche Einteilchenfunktion

$$\begin{aligned} \langle \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}_1 t) ; \hat{\psi}^+(\mathbf{r} t') \rangle \rangle &= \frac{1}{Q} \sum_{\mathbf{k}} \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) ; \hat{a}_{\mathbf{k}}^*(t') \rangle \rangle \exp\{i \mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\} \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathfrak{G}_1(\mathbf{k} \omega) \exp\{i \mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) - i\omega(t - t')\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\text{die Spektraldarstellung (A.5).} \quad \mathfrak{G}_1^0(\mathbf{k} \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\beta \hbar \omega} - 1) I^0(\mathbf{k} \omega') \frac{d\omega'}{\omega - \omega' \pm i\varepsilon}. \quad (7.11)$$

Mit (7.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1(\mathbf{k} \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\beta \hbar \omega} - 1) I(\mathbf{k} \omega') \frac{d\omega'}{\omega - \omega' \pm i\varepsilon}, \\ I(\mathbf{k} \omega) &= I^0(\mathbf{k}, \omega + w) (e^{\beta \hbar(\omega + w)} - 1) / (e^{\beta \hbar \omega} - 1). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^* in der GREENSchen Einteilchenfunktion (7.10) sind (für gleiche Zeiten) zueinander hermitesch konjugiert. Daraus folgt, daß die Spektralfunktion reell und nicht negativ ist (s. Anhang).

$$\begin{aligned} I^0(\mathbf{k} \omega) &\geq 0, \quad I(\mathbf{k} \omega) \geq 0, \\ I^0(\mathbf{k} \omega) \frac{e^{\beta \hbar \omega} - 1}{e^{\beta \hbar(\omega - w)} - 1} &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

¹⁹ Die Spektraldarstellung (A.6) macht die Lösungen eindeutig.

Aus $\varrho_0 = 0$ folgt also $\varrho_s = 0$. Ohne Kondensation gibt es nicht zwei unabhängige Bewegungen im System. Das entspricht genau der üblichen Vorstellung, daß der Phasenübergang von He II nach He I durch das Verschwinden des Kondensats charakterisiert wird.

Wir leiten nun eine Bedingung für das Spektrum der GREENSchen Einteilchenfunktion ab. Wir betrachten wieder ein kondensiertes BOSE-System (He II). Aus der Bewegungsgleichung (5.16) und Gl. (5.17b) ergibt sich, daß sich die Bewegung der beiden Komponenten gegeneinander nur in einer Frequenzverschiebung

$$\begin{aligned} \hbar \omega &\rightarrow \hbar \omega + \frac{\hbar^2}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \mathbf{k} = \hbar(\omega + w), \\ w &= (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (7.8)$$

äußert. Es ist wichtig, daß diese Frequenzverschiebung nicht von $\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s$, sondern nur von \mathbf{k} abhängt. Sie ist somit gleich für eine Klasse miteinander verkoppelter GREENScher Funktionen. Bezeichnen wir die Lösungen (zu bestimmtem β) der Bewegungsgleichung (5.16) für den Fall $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0 = 0$ mit $\mathfrak{G}_s^0(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega)$, so ergeben sich die Lösungen für gegeneinander bewegte Komponenten aus

$$\mathfrak{G}_s(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega) = \mathfrak{G}_s^0(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_s, \omega + w). \quad (7.9)$$

Diese Bedingungen liefern, daß für alle \mathbf{k}

$$\text{sign}(\omega) = \text{sign}(\omega - w) \quad \text{oder} \quad I^0(\mathbf{k} \omega) = 0. \quad (7.14)$$

Offensichtlich ist $I^0(\mathbf{k} \omega) = I^0(-\mathbf{k} \omega)$, so daß die Bedingung (7.14) lautet

$$|\omega| > |w(\mathbf{k})| \quad \text{oder} \quad I^0(\mathbf{k} \omega) = 0. \quad (7.15)$$

(7.15) ist eine notwendige Bedingung an das Spektrum bzw. an die möglichen Werte von $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0$. Da He II die Erscheinungen des Zweiflüssigkeiten-

modells zeigt, muß für He II das Einteilchenspektrum dieser Bedingung für kleine Beträge $|\mathbf{u} - \mathbf{k}_0|$ genügen. Die Bedingung entspricht dem LANDAU-schen Superfluiditätskriterium³. Es ist hier aber zu betonen, daß sich das Kriterium bei LANDAU auf die Phonon- und Rotonanregungen bezieht, während (7.15) für das Spektrum der GREENSchen Einteilchenfunktion gilt [vgl. die an Gl. (6.17) anschließende Diskussion]. Das LANDAUSCHE Kriterium liefert bekanntlich eine viel zu große kritische Geschwindigkeit für He II. Die kritische Geschwindigkeit scheint mit dem Einsatz turbulenter Bewegungen verknüpft zu sein. Ob die durch das Kriterium (7.15) festgelegte kritische Geschwindigkeit eine reale Bedeutung hat, kann erst durch weitere Untersuchungen geklärt werden.

Wir wenden das Kriterium jetzt auf das wechselwirkungsfreie BOSE-System an. Dafür gilt

$$I^0(\mathbf{k} \omega) = \hbar \frac{\delta(\hbar \omega - \varepsilon(\mathbf{k}))}{\exp\{\beta \varepsilon(\mathbf{k})\} - 1}, \quad (7.16)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m.$$

Die Bedingung (7.15) liefert dann

$$\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} > \left| \frac{\hbar}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \mathbf{k} \right| \text{ für alle } \mathbf{k}, \quad (7.17)$$

d. h. $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0 = 0$. Für das wechselwirkungsfreie BOSE-System ist nur uniforme Bewegung des ganzen Systems möglich²⁰.

Wir wenden nun das Kriterium auf das im Abschnitt 6 betrachtete verdünnte BOSE-System mit schwacher Wechselwirkung an. Für dieses System hat die Spektralfunktion die Form¹²

$$I^0(\mathbf{k} \omega) = A_-(\mathbf{k}) \delta(\hbar \omega - \varepsilon(\mathbf{k})) + A_+(\mathbf{k}) \delta(\hbar \omega + \varepsilon(\mathbf{k})). \quad (7.18)$$

Das Kriterium (7.15) liefert dann

$$\varepsilon(\mathbf{k}) > \left| \frac{\hbar}{m} (\mathbf{u} - \mathbf{k}_0) \mathbf{k} \right|, \quad (7.19)$$

d. h. $b > |a|$ für $\mathbf{u} = 0$ [s. Gl. (6.14)].

8. Das Verschwinden der normalen Komponente bei $T = 0$

Mit Hilfe des im vorigen Abschnitt abgeleiteten Kriteriums (7.15) läßt sich beweisen, daß am absoluten Nullpunkt der Temperatur die normale Kom-

²⁰ Das hätte auch aus den Betrachtungen am Anfang dieses Abschnittes gefolgt werden können.

ponente verschwindet. Wir betrachten dazu die Verteilungsfunktion

$$n(\mathbf{k}) = \frac{1}{Q} \langle \hat{a}_k^\dagger(t) \hat{a}_k(t) \rangle. \quad (8.1)$$

Diese Verteilungsfunktion berechnet sich aus der Spektralfunktion nach Gl. (A.5).

$$n(\mathbf{k}) = \frac{1}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{k} \omega) d\omega = \frac{1}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} I^0(\mathbf{k} \omega) \frac{e^{\beta \hbar \omega} - 1}{e^{\beta \hbar(\omega - \omega_0)} - 1} d\omega. \quad (8.2)$$

Um die ω -Abhängigkeit von I^0 zu übersehen, betrachten wir noch die aus der Vertauschungsrelation $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1$ und den Gln. (A.5) für $\mathbf{u} - \mathbf{k}_0 = 0$ folgende Beziehung

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} I^0(\mathbf{k} \omega) e^{\beta \hbar \omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} I^0(\mathbf{k} \omega) d\omega. \quad (8.3)$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite ist eine endliche Größe, nämlich die Zahl der Teilchen mit Impuls $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)$. Folglich muß für $\beta \rightarrow \infty$ die Spektralfunktion $I^0(\mathbf{k} \omega)$ für positives ω mindestens wie $e^{-\beta \hbar \omega}$ gegen Null gehen.

Wir betrachten nun den Nenner im Integranden von (8.2). Auf Grund des Kriteriums (7.15) ist dieser Nenner im Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ unabhängig von \mathbf{k} , und zwar gleich -1 für negative ω und ∞ für positive ω . Da $I^0(\mathbf{k} \omega)$ natürlich symmetrisch in \mathbf{k} ist, ergibt sich, daß auch $n(\mathbf{k})$ für $\beta \rightarrow \infty$ symmetrisch in \mathbf{k} ist.

Für den Gesamtimpuls erhalten wir dann

$$G = \hbar \mathbf{k}_0 \varrho_0 + \sum_{\mathbf{k}} \hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) n(\mathbf{k}) = \hbar \mathbf{k}_0 n. \quad (8.4)$$

Bei $T = 0$ bewegt sich das ganze System uniform mit dem Kondensat, die normale Komponente verschwindet.

Anhang. Die Spektraldarstellung

Wir betrachten Systeme mit bewegtem Kondensat, die sich in einem thermodynamischen Quasigleichgewicht befinden. In diesem Zusammenhang schränken wir die thermodynamische Mittelung ein und mitteln nur über Vielteilchenwellenfunktionen, die zu einem bestimmten Bewegungszustand des Kondensats gehören. Diese eingeschränkte Mittelung entspricht nicht mehr einer vollständigen Spurbildung. Es erweist sich deshalb als notwendig, die Gültigkeit der Spektraldarstellung für die GREENSchen Funktionen für unseren Fall zu prüfen.

Wir folgen bei der Ableitung der Spektraldarstellung der Arbeit von ZUBAREV¹⁶ und gehen aus von den Korrelationsfunktionen

$$K(t t') = \langle B(t') A(t) \rangle, \quad \tilde{K}(t t') = \langle A(t) B(t') \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Mit den Eigenfunktionen $|c_i\rangle$ und den Eigenwerten E_i von H erhalten wir

$$\begin{aligned} K(t t') &= Q^{-1} \sum_i (c_i | B(t') A(t) | c_i) e^{-\beta E_i} \\ &= Q^{-1} \sum_{ij} (c_i | B(0) | c_j) (c_j | A(0) | c_i) \\ &\quad \cdot e^{-\beta E_i} e^{-i(E_i - E_j)(t-t')/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

wobei

$$Q = \langle e^{-\beta H} \rangle.$$

Dabei geht die Summation über i über den erwähnten eingeschränkten Bereich. Die Summation über den Index j der eingeschobenen Zustände müßte an sich über ein vollständiges System von Zuständen gehen.

Analog erhalten wir

$$\tilde{K}(t t') = Q^{-1} \sum_{ij} (c_i | A(0) | c_j) (c_j | B(0) | c_i) e^{-\beta E_i} e^{-i(E_j - E_i)(t-t')/\hbar}. \quad (\text{A.3})$$

Mit Hilfe der Spektralfunktion

$$I(\omega) = Q^{-1} \sum_{ij} (c_i | A(0) | c_j) (c_j | B(0) | c_i) e^{-\beta E_j} \delta(E_j - E_i - \hbar \omega) \quad (\text{A.4})$$

lassen sich dann die Korrelationsfunktionen in der Form schreiben

$$\begin{aligned} K(t t') &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \\ \tilde{K}(t t') &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{\beta\hbar\omega} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Unter Verwendung der FOURIER-Entwicklung der Sprungfunktion $\Theta(t)$ ergibt sich für die GREENSchen Funktio-

In den hier betrachteten Fällen ist der Operator $B = \psi^+$. Der Operator A ist ein Produkt aus s Feldoperatoren ψ oder ψ^+ . Die Bewegung des Kondensats stellt die Bewegung einer makroskopischen Zahl von Teilchen (vermutlich etwa 8% der Gesamtteilchenzahl N) dar. Die Anwendung einer gegen N kleinen Anzahl s von Feldoperatoren auf den Zustand $|c_i\rangle$ verändert die Kondensatbewegung nicht. Wir kommen deshalb aus dem eingeschränkten Bereich nicht heraus und können für j denselben Bereich wie für i nehmen. Das ist der entscheidende Punkt, da zur Ableitung der Spektraldarstellung die Summationsindizes i und j in (A.2) vertauscht werden müssen. Auch die Funktionen mit größerem s ($s \gtrsim N$) machen keine Schwierigkeiten. Bei GREENSchen Funktionen so extrem hoher Ordnung ist sicher eine Entkopplung (Kontraktion von Feldoperatoren in A) möglich, wodurch sich das Problem auf die Spektraldarstellung von GREENSchen Funktionen niedrigerer Ordnung reduziert.

nen die Spektraldarstellung

$$\mathfrak{G}_{r,a}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\beta\hbar\omega'} - 1) I(\omega') \frac{d\omega'}{\omega - \omega' \pm i\varepsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Aus der Spektraldarstellung folgt

$$\mathfrak{G}(\omega + i\varepsilon) - \mathfrak{G}(\omega - i\varepsilon) = -i(e^{\beta\hbar\omega} - 1) I(\omega). \quad (\text{A.7})$$

Gl. (A.4) zeigt, daß für $B(0) = A^+(0)$ die Spektralfunktion reell und nicht negativ ist.